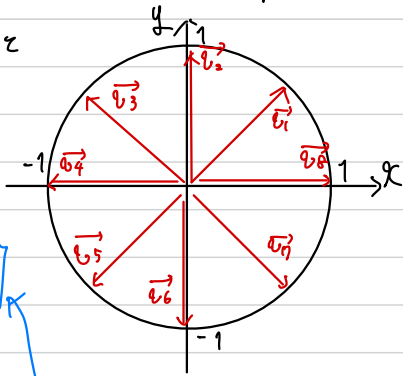


1995年

東大数学

文系第2問

\vec{v}_k ($k=1,2,\dots,8$) を図示する
右のようになります



$$\begin{aligned} \vec{P_0 P_8} &= \vec{P_0 P_1} + \vec{P_1 P_2} + \vec{P_2 P_3} + \vec{P_3 P_4} \\ &+ \vec{P_4 P_5} + \vec{P_5 P_6} + \vec{P_6 P_7} + \vec{P_7 P_8} \\ &= a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + a\vec{v}_3 + b\vec{v}_4 \\ &+ a\vec{v}_5 + b\vec{v}_6 + a\vec{v}_7 + b\vec{v}_8 \\ &= a(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + a(\vec{v}_5 + \vec{v}_7) \\ &+ b(\vec{v}_2 + \vec{v}_4) + b(\vec{v}_6 + \vec{v}_8) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

問題文で

$$\begin{aligned} \vec{P_{2n} P_{2n+1}} &= a \vec{v}_{2n+1} \\ \vec{P_{2n+1} P_{2n+2}} &= b \vec{v}_{2n+2} \end{aligned}$$

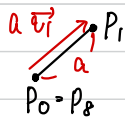
隣り合った整数
定義された4子のv

(\therefore 右の図より)

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{v}_5 + \vec{v}_7 = \vec{v}_6 + \vec{v}_8 = \vec{0}$$

$$\vec{P_0 P_8} = \vec{0} \text{ より } P_0 = P_8$$

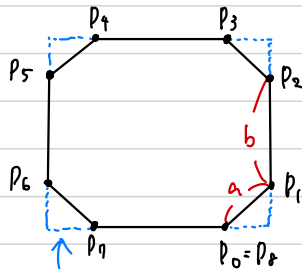
(2) $\vec{P_0 P_1} = a \vec{v}_1$ より
 P_0 と P_1 の位置関係は右のよう



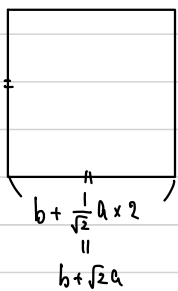
$\vec{P_1 P_2} = b \vec{v}_2$ より
 P_1 と P_2 の位置関係は右のよう



これを繰り返して、 $P_0 \sim P_8$ の
点を描くと、右のよう



この面積は



$$\begin{aligned} &= (b + \sqrt{2}a)^2 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \times 4 \\ &= a^2 + b^2 + 2\sqrt{2}ab \end{aligned}$$

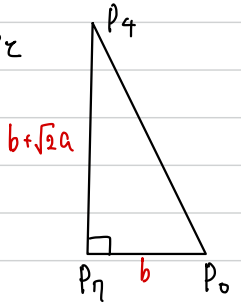
(3) $S=7$ より $a^2 + b^2 + 2\sqrt{2}ab = 7 \dots \textcircled{1}$

$P_0 P_4 = \sqrt{10}$ かつ $\triangle P_0 P_4 P_7$ を図示する

右のよう

三平方の定理より

$$\begin{aligned} P_0 P_4^2 &= (b + \sqrt{2}a)^2 + b^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}a \end{aligned}$$



よって $2a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab = (\sqrt{10})^2$
 $= 10$

$$a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = 5 \dots \textcircled{2}$$

- ① ... $a^2 + b^2 + 2\sqrt{2}ab = 7$) 又は連立方程式と
② ... $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = 5$) 解くだけ

① - ② $\times 2$ より $-a^2 - b^2 = -3$ $a^2 + b^2 = 3$

① - ② より $\sqrt{2}ab = 2$ $ab = \sqrt{2}$ $\therefore a^2 b^2 = 2$

a^2 と b^2 の和と積がわかったので2次方程式

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 3 \\ a^2 b^2 = 2 \end{cases} \text{ より } a^2 \text{ と } b^2 \text{ は 実数 } t \text{ の 2次方程式}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \text{ の 2解がある}$$

よって $(a^2, b^2) = (1, 2) (2, 1)$ $a > 0$ $b > 0$ で解を

$(a, b) = (1, \sqrt{2}) (2, 1)$